Intégration

Sélection d'exercices correspondant au paragraphe "Intégration" du programme de terminale S (B.O.spécial n°8 du 13 octobre 2011)

Exercice 1 - *Formules de dérivées et primitives simples*

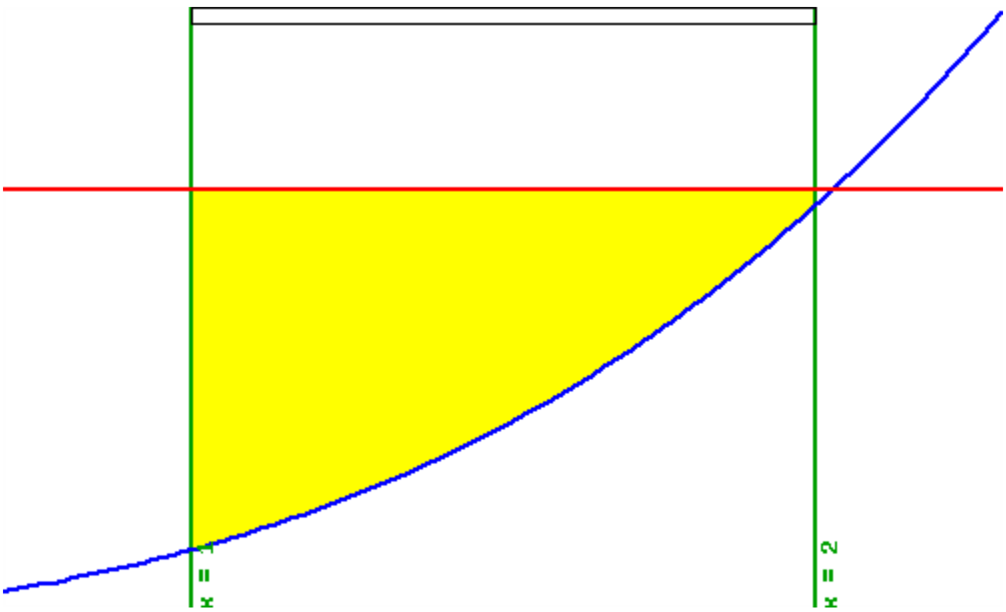
- La dérivée de $3x^2$ est : ___________
- La dérivée de $4x^3$ est : ___________
- La dérivée de $3x$ est : ___________
- Une primitive de $3x$ est : ___________
- Une primitive de $\frac{6}{x^2}$ est : ___________
- Une primitive de $3x^2$ est : ___________

Exercice 2 - *Calcul d'une intégrale*
Calculer la valeur exacte de l'intégrale :

$$I = \int_{-3}^{1} (3x+2)^2 \, \mathrm{dx}$$

Exercice 3 - *Aire entre une courbe et l'axe des x*
Déterminer la valeur exacte de l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de la fonction f définie par : $f(x) = 3x^3 - x^2 + 4x - 29$, l'axe des abscisses , et les droites verticales d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

L'allure de la courbe représentative de f est donnée ci-dessous ; le domaine est colorié en jaune.
Le rectangle noir indique l'unité d'aire.

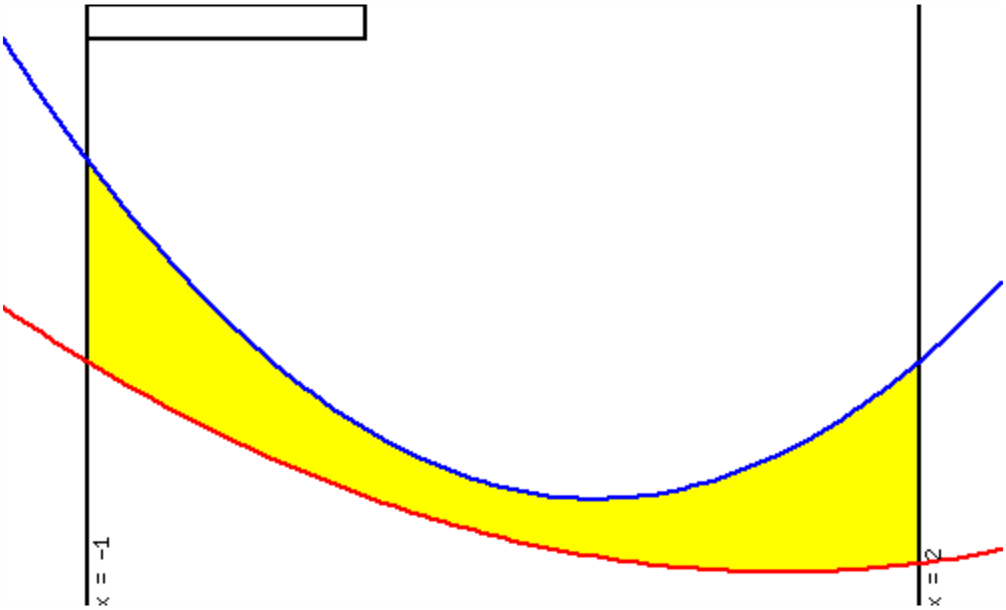


Exercice 4 - *Aire entre deux courbes*

La courbe représentative de la fonction f définie par : $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ est dessinée ci-dessous en bleu.

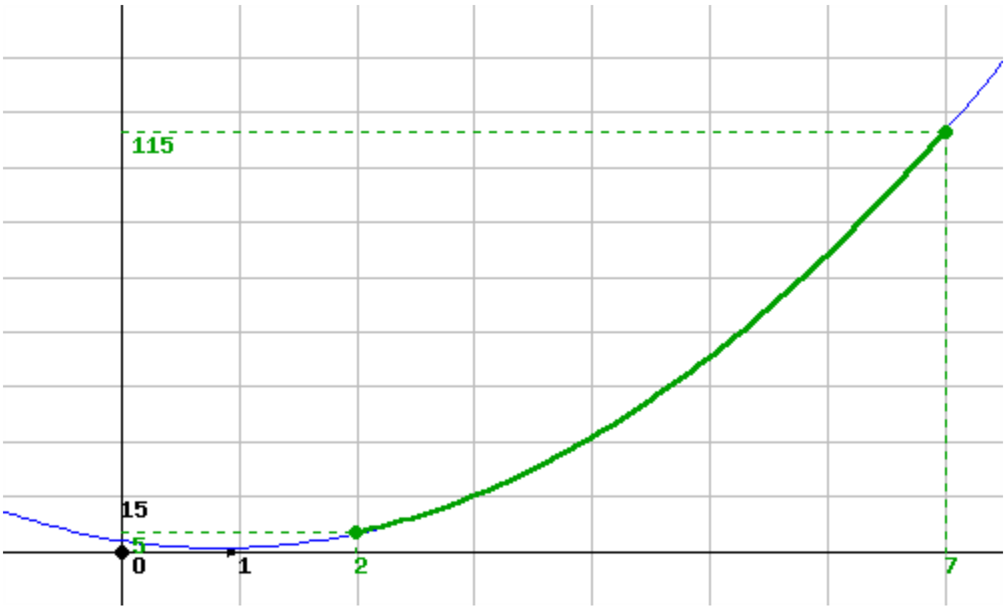
La courbe représentative de la fonction g définie par : $g(x) = x^2 - 3x$ est dessinée en rouge.

Les droites dessinées en noir ont comme équations $x = -1$ et $x = 2$.
L'aire du rectangle noir est 1 unité d'aire.



Déterminer la valeur exacte de l'aire du domaine colorié en jaune.

Exercice 5 - *Moyenne de fonction*
La courbe représentative d'une fonction f est dessinée ci-dessous :



Déterminer graphiquement l'ordre de grandeur de la valeur moyenne sur l'intervalle [2,7] de la fonction f.

Exercice 6 - *Primitive de forme donnée*

Déterminer les nombres a et b pour que la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{ax+b}{x^2+1}$ soit une primitive de la fonction f définie par $f(x) = -\dfrac{3x^2+6x-3}{x^4+2x^2+1}$

En déduire ensuite l'expression de $F(x)$.

Exercice 7 - *Vrai / Faux sur les primitives*
Parmi les affirmations suivantes, cocher celles qui sont vraies : .

___________ . Si f est une primitive de g sur I, alors $g' = f$ sur I.

___________ . Si u est dérivable sur I, la fonction composée e^u est une primitive sur I de la fonction $u' e^u$.

___________ . Si f admet une primitive sur I, alors f est dérivable sur I.

___________ . La fonction $x \mapsto \sin(\pi + x)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos x$.

___________ . La fonction $x \mapsto 1 + \tan^2 x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \tan x$.

___________ . La fonction $x \mapsto \cos(\pi - x)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \sin x$.

___________ . Si F est une primitive de f sur I, alors F est dérivable sur I.

___________ . Si u est strictement positive et dérivable sur I, la fonction composée 2 est une primitive sur I de la fonction $\frac{u'}{\sqrt{u}}$.

Exercice 8 - *Fonction définie par une intégrale*
On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_3^x -\frac{1}{3t^2 + 2}\,\mathrm{dt}$$

Sur $\mathbb{R}$, la fonction F est :

- croissante
- décroissante

Exercice 9 - *Formules de dérivées et primitives*

1. La dérivée de $x \mapsto -4\sin(-4x + 3)$ en tout point $x \in \mathbb{R}$ est ___________
2. La dérivée de $x \mapsto -\frac{1}{\sin(x)}$ en tout point $x \in \ ]-2\pi, -\frac{3}{2}\pi[$ est ___________
3. Une primitive de $x \mapsto 5\cos(5x)$ sur $\mathbb{R}$ est donnée par la fonction

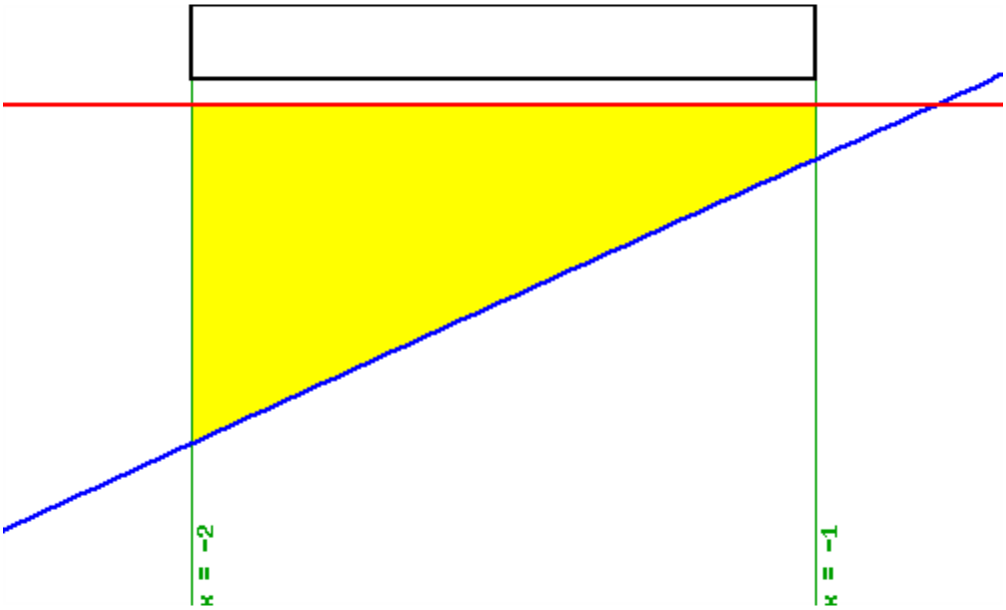
   $x \mapsto$ ___________
4. Une primitive de $x \mapsto -\frac{2\sin(x)}{\cos^2(x)}$ sur l'intervalle $]-2\pi, -\frac{3}{2}\pi[$ est donnée par la fonction

   $x \mapsto$ ___________

Exercice 10 - *Calcul d'aire*
Déterminer la valeur exacte de l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de la fonction f définie par : $f(x) = -e^{\frac{1}{3}x} + 4x + 4$, l'axe des abscisses , et les droites verticales d'équations $x = -2$ et $x = -1$.

La courbe représentative de f est tracée en bleu, et l'axe des abscisses en rouge ; le domaine est colorié en jaune.

Le rectangle noir indique l'unité d'aire.



Exercice 11 - *Intégrale avec fonction trigonométrique*
Calculer la valeur exacte de l'intégrale

$$I = \int_{\pi}^{-3\pi/4} -2\sin(3x)\,dx$$

La fonction racine carrée se note `sqrt` *. Par exemple, sqrt(2)=* $\sqrt{2}$*. Le nombre* π *se note* `pi` *.*

Exercice 12 - *Primitives par reconnaissance de dérivée*

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2e^{-x-1}$$

La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en -1 est définie par :

$$F(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Consignes de saisie *:* `a/b` *pour le rational* $\frac{a}{b}$ *;* `sqrt(a)` *pour le réel* $\sqrt{a}$ *;* `exp(a)` *ou* `e^a` *pour le réel* e^a*.*

Exercice 13 - *Fonctions trigonométriques*

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -4\cos(-x)$$

La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 est définie par :

$$F(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Exercice 14 - *Calcul d'une intégrale*
Calculer la valeur exacte de l'intégrale :

$$I = \int_3^4 (x+2)^2\, dx$$

> *Pour entrer la réponse, on utilise les conventions suivantes :*
> *La fonction logarithme népérien s'écrit* `log`. *Par exemple, on tape* `log(2)` *pour écrire le réel* `ln(2)`.
> *La fonction racine carrée s'écrit* `sqrt`. *Par exemple, on entre* `sqrt(2)` *pour écrire le réel* $\sqrt{2}$.
> *Enfin, la fonction exponentielle s'écrit* `exp`. *Par exemple, on tape exp(2) pour désigner le réel* e^2. *Il est aussi possible de simplifier la notation en écrivant e^2.*

Exercice 15 - *Calcul d'une valeur moyenne*
Calculer la valeur moyenne sur l'intervalle [3;5] de la fonction f définie par :

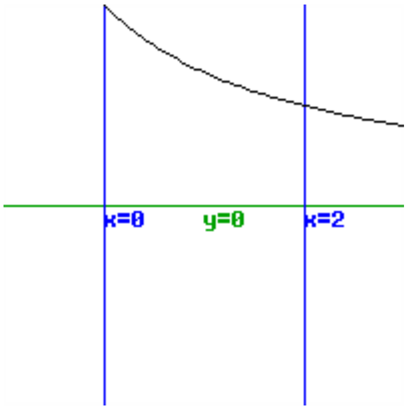
$$f(x) = \frac{1}{2x-2}$$

> *Pour entrer la réponse, on utilise les conventions suivantes :*
> *La fonction logarithme népérien s'écrit* `log`. *Par exemple, on tape* `log(2)` *pour écrire le réel* $\ln(2)$.
> *La fonction racine carrée s'écrit* `sqrt`. *Par exemple, on entre* `sqrt(2)` *pour écrire le réel* $\sqrt{2}$.
> *Enfin, la fonction exponentielle s'écrit* `exp`. *Par exemple, on tape* `exp(2)` *pour désigner le réel* e^2. *Il est aussi possible de simplifier la notation en écrivant* `e^2`.

Exercice 16 - *Calcul d'une aire*
Déterminer la valeur exacte de l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+4x+4}$$

l'axe des abscisses, et les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 2$. L'allure de la courbe représentative de f est donnée ci-dessous :



Pour entrer la réponse, on utilise les conventions suivantes :
La fonction logarithme népérien s'écrit `log`*. Par exemple, on tape* `log(2)` *pour écrire le réel* $\ln(2)$*.Inversement, le logiciel écrit* `log` *à la place de* $\ln$.
La fonction racine carrée s'écrit `sqrt`*. Par exemple, on entre* `sqrt(2)` *pour écrire le réel* $\sqrt{2}$.
Enfin, la fonction exponentielle s'écrit `exp`*. Par exemple, on tape* `exp(2)` *pour désigner le réel* e^2*. Il est aussi possible de simplifier la notation en écrivant* `e^2`*.*

Exercice 17 - *Calcul de primitive et intégrale*

1. Déterminer les nombres a et b pour que la fonction F définie par $F(x) = \left(x^2 + ax + b\right)e^{-x}$ soit une primitive de la fonction f définie par $f(x) = -\left(x^2 - 3x - 4\right)e^{-x}$.
2. En déduire ensuite l'expression de $F(x)$.
3. Calculer $\displaystyle\int_2^{9/4} f(x)\mathrm{dx}$.

Donner la réponse

Réponse à l'exercice 2.

- *Valeur de I* : `52`

Réponse à l'exercice 3.

- *Valeur de l'aire (en unités d'aire)* : `169/12`

Réponse à l'exercice 4.

- *Valeur de l'aire (en unités d'aire)* : `9`

Réponse à l'exercice 5.

- *Ordre de grandeur de la valeur moyenne* : `33,70`
- *Valeur moyenne* : `95/2`

Réponse à l'exercice 6.

- *a* : `3`

- *b* : `3`
- *F(x)* : `(3*x+3)/(1*x^2+1)`

Réponse à l'exercice 7.

- *La réponse* : `2, 6, 7, 8`

Réponse à l'exercice 8.

- *Sens :* : décroissante

Réponse à l'exercice 10.

- *Valeur de l'aire (en unités d'aire)* : `3* e^-(1/3)-3* e^-(2/3)+2`

Réponse à l'exercice 11.

- *Valeur de I* : `sqrt(2)/3+2/3`

Réponse à l'exercice 12.

- *Valeur de F(x)* : `-2* e^((-x)-1)+2`

Réponse à l'exercice 13.

- *Valeur de F(x)* : `-4*sin(x)`

Réponse à l'exercice 14.

- *Valeur de I* : `91/3`

Réponse à l'exercice 15.

- *Valeur de I* : `(log(8)/2-log(4)/2)/2`

Réponse à l'exercice 16.

- *Valeur de I* : `log(16)/2-log(4)/2`

Réponse à l'exercice 17.

- *a* : `-1`
- *b* : `-5`
- *F(x)* : `(x^2-x-5)* e^-x`
- *intégrale* : `3* e^-2-(35* e^-(9/4))/16`