

DM de mathématiques : Étudier une suite de somme

<u>Note :</u>	<u>Observations :</u>

TP 3 Page 29

On considère la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=1}^n k \times (n - k)$ pour n appartenant aux entiers naturels.

1. Bien comprendre la formule

a. $S_3 = 1 \times 2 + 2 \times 1 + 3 \times 0 = 4$

$S_4 = 1 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 1 + 4 \times 0 = 10$

b. Non il n'y a pas de relation de récurrence immédiate de la forme $S_{n+1} = S_n + \dots$

2. Calcul d'un terme particulier

$S_{20} = 1330$ d'après la fonction de la calculatrice.

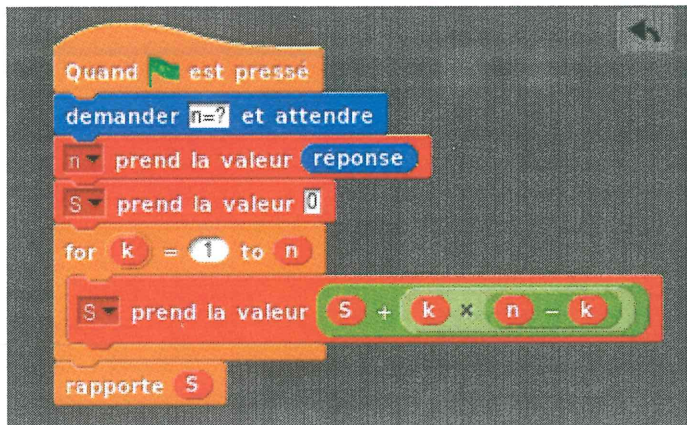
3. Calcul des premiers termes de la suite

ENTRÉE : Saisir n

INITIALISATION : S prend la valeur 0

TRAITEMENT : Pour k de 1 à n Faire
| S prend la valeur $\sum_{k=1}^n k \times (n - k)$
FinPour

SORTIE : Afficher S



k 0
n 20
S 1330

TB

c. On suppose que cette suite est croissante ($S_3 = 4$; $S_4 = 10$; $S_{20} = 1330$).

mi

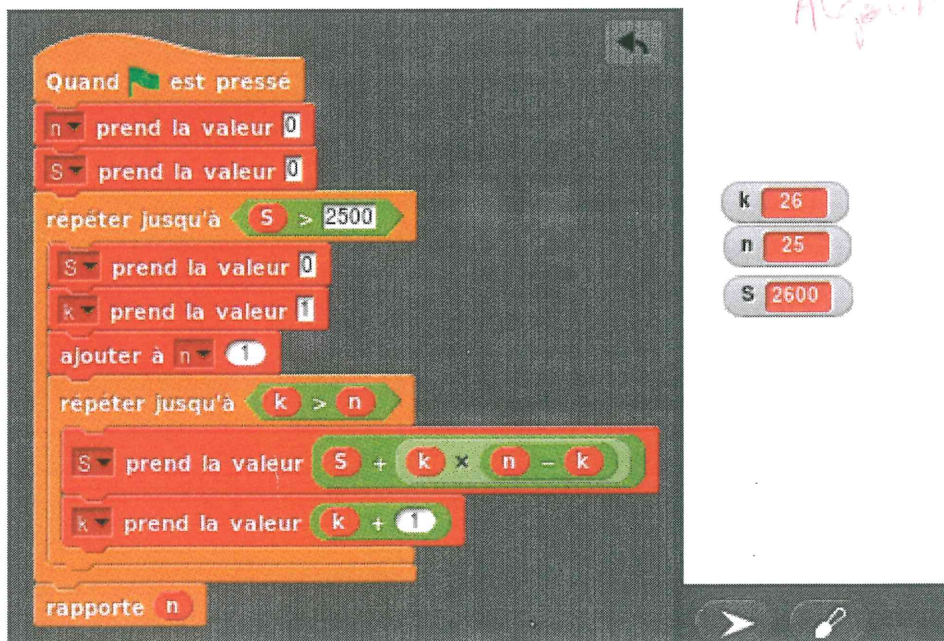
4. Recherche d'un terme sous condition



k 21
n 20
S 1330

TB

Algorithme demandé



k 26
n 25
S 2600

TB

5. Obtenir une expression générale

a. On a $S_n = \sum_{k=1}^n k \times (n - k)$

D'où

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k \times (n+1 - k) = \sum_{k=1}^n (kn + k - k^2) = \sum_{k=1}^n (k \times (n - k) + k) = \sum_{k=1}^n k \times (n - k) + \sum_{k=1}^n k = S_n + \sum_{k=1}^n k$$

Comme $\sum_{k=1}^n k = \frac{n \times (n+1)}{2}$, $S_{n+1} = S_n + \frac{n \times (n+1)}{2}$

b. On a pour tout n entier, n plus grand ou égal à 0, $S_{n+1} = S_n + \frac{n \times (n+1)}{2}$ et on souhaite montrer

que $S_n = \frac{n^3 - n}{6}$.

Initialisation

Pour n=1

$\frac{1^3 - 1}{6} = 0$ et $S_1 = 0$ donc la propriété est vraie pour n=1.

Hérédité

Supposons que ça soit vrai pour k entier avec

$k \geq 1$ avec $S_k = \frac{k^3 - k}{6}$ donc $S_{k+1} = \frac{(k+1)^3 - (k+1)}{6} = \frac{k^3 + 3k^2 + 2k}{6}$

On a $S_{k+1} = S_k + \frac{k \times (k+1)}{2} = \frac{k^3 - k}{6} + \frac{k \times (k+1)}{2} = \frac{k^3 + 3k^2 + 2k}{6}$

Conclusion

Comme l'hérédité est vraie alors on peut bien obtenir l'expression simplifiée de S_n en fonction de n.

c. Pour démontrer le sens de variation de la suite qui est une fonction, on doit trouver sa dérivée et faire un tableau de variation.

$F'(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}$

$x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$		
$f'(x)$	+	0	-	0	+	
$f(x)$			$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	

La suite est bien croissante pour $x \geq 1$ d'après le tableau de variation.

Donc la conjecture faite au 3.c est vérifiée.

DM de maths: TP3 étudier une suite de sommes (p29)

Note:

Observations:

19
20

$$S_n = \sum_{k=1}^n k \times (n-k) \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*$$

1. Bien comprendre la formule

a) $S_3 = 1 \times (3-1) + 2 \times (3-2) + 3 \times (3-3)$ ✓
 $1 \times 2 + 2 \times 1 + 3 \times 0$

$$S_4 = 1 \times (4-1) + 2 \times (4-2) + 3 \times (4-3) + 4 \times (4-4)$$
$$1 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 1 + 4 \times 0$$
 ✓

b) Non, il n'y a pas de relation de récurrence immédiate (cf question 5a) ✓

2. Calcul d'un terme particulier

On utilise la formule du livre :

Somme(suite ($k \cdot (20 - k)$), k , 1, 20, 1))

$$S_{20} = 1330$$

3. Calcul des premiers termes de la suite

a) **ENTRÉE** : Saisir n
INITIALISATION : S prend la valeur 0
TRAITEMENT : Pour k de 1 à n Faire
 S prend la valeur $S + k \times (n - k)$
FinPour
SORTIE : Afficher S

b)

```
PROGRAM:ZELDA
:Prompt N
:Q→S
:For(K,1,N)
:S+K*(N-K)→S
:End
:Disp S
```

```
PrgmZELDA
N=?20
1330
Done
```

c) Conjecture sur le sens de variation :

Après différents calculs et vérification avec le programme nous pouvons conclure que la suite (S_n) semble croissante.

JEZICA
 Maxie Julie
 NICOLE
 Guillaume

4. Recherche d'un terme sous condition

4a) ?

4b)

```
INITIALISATION : n prend la valeur 1
                  S prend la valeur 0
TRAITEMENT      : Tant que (S ≤ 2500) Faire
                  | n prend la valeur n+1
                  | S prend la valeur 0
                  Pour k de 1 à n
                  | S prend la valeur S + k × (n - k)
                  Fin Pour
                  Fin Pour Tant que
SORTIE          : Afficher n
```

TB

Soit :

```
PROGRAM:ZELDA
:1→N
:0→S
:While (S≤2500)
:N+1→N
:0→S
:For(K,1,N)
:S+K*(N-K)→S
```

```
PROGRAM:ZELDA
:0→S
:For(K,1,N)
:S+K*(N-K)→S
:End
:End
:Disp N
█
```

TB

Vérification:

```
PrgmZELDA    Done
PrgmZELDA    Done
              25
              Done
```

```
PrgmZELDA    25
              Done
N=?25
              2600
              Done
█
```

TB

5. Obtenir une expression générale

a) On veut montrer que $S_{n+1} = S_n + \sum_{k=1}^n k$, pour tout $n \geq 1$

$$S_n = \sum_{k=1}^n k \times (n-k)$$

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k \times (n+1-k)$$

$$= \sum_{k=1}^n (kn + k - k^2)$$

$$= \sum_{k=1}^n (k(n-k) + k)$$

$$= \sum_{k=1}^n k(n-k) + \sum_{k=1}^n k$$

$$\text{donc } S_{n+1} = S_n + \frac{n(n+1)}{2}$$

où est passé le $(n+1)$?
(A justifier)

Th

b) Démonstration par récurrence $S_n = \frac{n^3 - n}{6}$ pour tout $n \geq 1$

$$S_{n+1} = S_n + \sum_{k=1}^n k$$

Étape 1 : Initialisation

La propriété est vraie pour $n=1$ car :

$$\frac{1^3 - 1}{6} = 0 \quad \text{et } S_1 = 0$$

Étape 2 : Hérédité

Si l'hypothèse est supposée vraie pour un entier $k \geq 1$

$$\text{Donc : } S_k = \frac{k^3 - k}{6}$$

Alors je dois démontrer que :

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)^3 - (k+1)}{6} = \frac{k^3 + 3k^2 + 2k}{6}$$

1.1.15, On a : $S_{k+1} = S_k + \frac{k(k+1)}{2}$

$$= \frac{k^3 - k}{6} + \frac{k(k+1) \times 3}{2 \times 3}$$

$$= \frac{k^3 - k}{6} + \frac{3k^2 + 3k}{6}$$

$$= \frac{k^3 + 3k^2 + 2k}{6}$$

donc $S_{k+1} = \frac{(k+1)^3 - (k+1)}{6}$
 la pth est vraie au rang $k+1$.

Étape 3: Conclusion

$S_n = \frac{n^3 - n}{6}$

La propriété est vraie pour $n=1$, elle est donc vraie par hérédité donc, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

c) D'après notre programme nous avons pu voir que la suite semblait croissante :

$S_{20} = 1330 \quad S_{21} = 1540 \quad S_{22} = 1771 \quad S_{23} = 2000 \quad \text{etc...}$

Pour étudier son sens de variation nous devons voir si la fonction est croissante. Nous savons que :

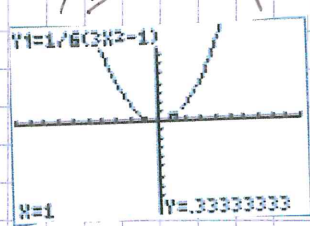
$S_n = \frac{n^3 - n}{6}$ pour $n \geq 1$

$S_n = \frac{1}{6} (n^3 - n)$

donc nous avons : $f(x) = \frac{1}{6} (x^3 - x)$ pour $x \geq 1$

pour étudier son sens de variation nous avons donc : $f'(x) = \frac{1}{6} (3x^2 - 1)$

$f'(x) \geq 0$ pour l'intervalle $[1; +\infty[$



1 Phrase pour conclure ?

La suite définie par

$S_n = f(n)$ est strict^{mt} croissante sur $\mathbb{N}$ puisque f est strict^{mt} croissante sur $[1; +\infty[$

