

BOYER Manon

TSIA KING FUNG

Amélie TS2

29/08/2017

Mathématiques: TP 3 p. 29

$\frac{17}{20}$

$$S_m = \sum_{k=1}^m k \times (m-k) \text{ pour } m \in \mathbb{N}^*$$

1)a) $S_3 = 1 \times (3-1) + 2 \times (3-2) + 3 \times (3-3)$ ✓

$$S_3 = 2 + 2 + 0 = 4$$

$$S_4 = 1 \times (4-1) + 2 \times (4-2) + 3 \times (4-3) + 4 \times (4-4)$$
 ✓

$$S_4 = 3 + 4 + 3 + 0 = 10$$
 ✓

b) Non il n'y a pas de relation de récurrence immédiate. ✓

2) En utilisant l'outil somme de la calculatrice $S_{20} = 1330$. ✓

3)a) Variables : S : nombre entier

m : indice : entier

k : indice de la somme : entier

Saisir m

$S \leftarrow 0$

Pour k allant de 1 à m faire

$S \leftarrow S + k(m-k)$

Fin Pour

Afficher S

b) Voir programme Snap! ✓

(où ?)

c) $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
 car $S_3 > S_2$ ~~soit~~ ^{car} $(4 > 1)$ et $S_4 > S_3$ ~~soit~~ ^{car} $(10 > 4)$.

Nous pouvons donc émettre la conjecture suivante : la suite semble croissante.

a) ?

b) Variables : n : nombre entier

k : indice de la somme : nombre entier

S : nombre entier

$n \leftarrow 1$

$S \leftarrow 0$

tant que $S \leq 2500$ faire

$n \leftarrow n + 1$

$S \leftarrow 0$

Pour k allant de 1 à n

$S \leftarrow S + k(n - k)$

Fin Pour

Fin tant que

Afficher n

Résultat ?

$n = ?$

5) a) Montrons que pour tout $n \geq 1$, $S_{n+1} = S_n + \sum_{k=1}^n k$

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k(n+1-k)$$

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^n k(n+1-k)$$

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^n (k(n-k) + k)$$

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^n (k(n-k) + k) = S_n + \sum_{k=1}^n k = \boxed{S_n + \frac{n(n+1)}{2}}$$

b) Démontrons par récurrence que $S_n = \frac{n^3 - n}{6}$ pour tout $n \geq 1$

initialisation: montrons que c'est vraie pour $n=1$

$$S_1 = \frac{1^3 - 1}{6} = 0 \text{ donc la propriété est vraie pour } n=1$$

hérédité: supposons que pour tout entier $k \geq 1$, $S_k = \frac{k^3 - k}{6}$

~~$S_{k+1} = \frac{(k+1)^3 - (k+1)}{6}$~~ // NON ! elle doit être la conclusion

~~$S_{k+1} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}$~~

~~$S_{k+1} = \frac{k(k^2 + 2k + k + 2)}{6}$~~

~~$S_{k+1} = \frac{k^3 + 2k^2 + k^2 + 2k}{6}$~~

~~$S_{k+1} = \frac{k^3 + 3k^2 + 2k}{6}$~~

or $S_{k+1} = \dots$

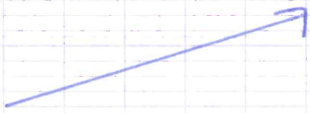
La propriété est donc héréditaire. à revoir

B Conclusion: La propriété est vraie pour $n=1$, par l'hérédité elle est vraie pour $n=2$, etc... Donc pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = \frac{n^3 - n}{6}$

c) Posons $f(x) = \frac{1}{6}(x^3 - x)$ pour $x \geq 1$

$$f'(x) = \frac{1}{6}(3x^2 - 1) \geq 0 \text{ sur } [1; +\infty[$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $[1; +\infty[$ donc la suite est strictement croissante.

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

$\sqrt{x}$