Notion de fonction

*On utilise parfois dans la vie courante l'expression « **en fonction de** » pour traduire une dépendance entre deux situations. En Mathématiques, une fonction traduit la dépendance entre deux nombres.*

A- Définitions

Une fonction f permet d'associer à tout nombre x d'un ensemble D un nombre **unique** y.
L'ensemble D est appelé *ensemble de définition* de la fonction f.
Le nombre x est une *variable* qui parcourt cet ensemble.
Le nombre y est l'*image* de x.
Il est important de noter que tout élément de l'ensemble de définition a une image et que celle-ci est unique.

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto y = f(x)$

1. Calcul de l'image d'un nombre

L'image d'un nombre x par une fonction f se note $f(x)$; on lit «f de x».
Pour désigner la fonction qui à x associe $f(x)$ on écrit $f : \hookrightarrow f(x)$.
On définit une fonction en indiquant un moyen de déterminer $f(x)$ lorsque x est donné; cela se fait souvent avec une formule.

Exemples

1. Soit f la fonction qui à x associe son double. On écrira $f : x \hookrightarrow 2x$
   L'image de 5 est $2 \times 5 = 10$, on écrit $f(5) = 10$. l'image de 5 est 10
2. Soit g la fonction qui à x associe son carré. On écrira $g : x \hookrightarrow x^2$
   L'image de 3 est $3^2=9$, on écrit $g(3) = 9$. 3 a pour image 9
3. Considérons la fonction $h : x \hookrightarrow x^2 - 5x$ et calculons l'image de (-4). $x(x-5)$
   Il suffit de remplacer x par (-4) dans la formule qui définit la fonction h.
   $h(-4) = (-4)^2 - 5 \times (-4) = 16 + 20 = 36$.
   L'image de (-4) est donc 36.

$\left.\begin{array}{l} x \longrightarrow x \\ x \xrightarrow{-5} x-5 \end{array}\right\} \times \longrightarrow x^2 - 5x$

2. Antécédent

> Considérons une fonction f et deux réels a et b tels que $b = f(a)$.
> Nous savons que b est l'image de a. unique
> On dit alors aussi que a est **un** antécédent de b. plusieurs antécédents possibles.

Attention
Le nombre a n'a qu'une image mais b peut avoir plusieurs antécédents, c'est ce qui explique l'utilisation de l'article « **un** ».

Retenons
Les antécédents par une fonction f d'un réel b sont les réels dont l'image est b, ce sont donc les solutions de l'équation $f(x) = b$; leur nombre dépend de la fonction f.

Exemples

1. Considérons la fonction $f : x \hookrightarrow x - 3$ et cherchons le ou les antécédents de 5.
   Il s'agit de déterminer l'ensemble des réels x dont l'image est égale à 5, donc de résoudre l'équation $x - 3 = 5$. Celle-ci n'a qu'une solution qui est $x = 8$, donc 5 a un unique antécédent qui est 8.

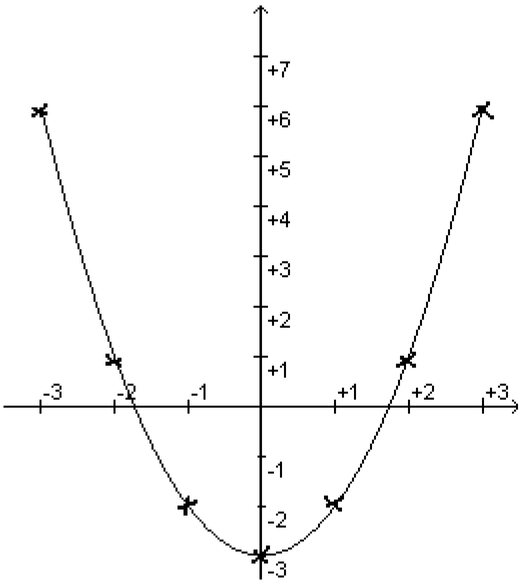
2. Considérons la fonction $g : x \hookrightarrow x^2$ et cherchons le ou les antécédents de 25.
   Il s'agit de déterminer l'ensemble des réels x dont l'image est égale à 25, donc de résoudre l'équation $x^2 = 25$. Celle-ci a deux solutions qui sont $x = 5$ et $x = -5$, donc 25 a deux antécédents qui sont 5 et -5.

3. Considérons la fonction $h : x \hookrightarrow x^2 + 1$ et cherchons le ou les antécédents de 0.
   Il s'agit de déterminer l'ensemble des réels x dont l'image est égale à 0, donc de résoudre l'équation $x^2 + 1 = 0$. Comme x^2 est toujours positif, $x^2 + 1$ est toujours supérieur ou égal à 1, il n'est donc pas possible de trouver un réel x tel que $x^2 + 1 = 0$. 0 n'a donc pas d'antécédent.

B- Représentation graphique d'une fonction

> Soit f une fonction sur l'ensemble D.
>
> Dans le plan muni d'un repère, on appelle représentation graphique de f l'ensemble des points M(x, y) pour lesquels x est élément de D et $y = f(x)$.
>
> Ces points forment la courbe d'équation y=f(x).

Exemple
Considérons la fonction $f : x \hookrightarrow x^2 - 3$ définie sur l'intervalle [-3 ; 3] et construisons sa représentation graphique.

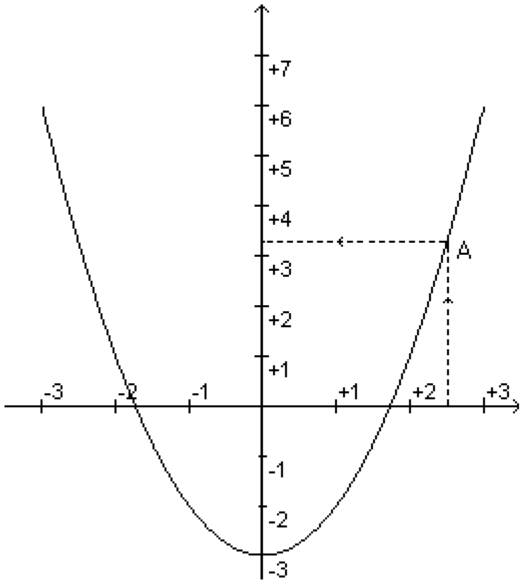


Pour effectuer cette construction nous commencerons par calculer un certain nombre d'images. Les résultats sont inscrits dans un tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6	1	-2	-3	-2	1	6

Dans le plan muni de son repère, on place les points de coordonnées (x, $f(x)$), puis on les relie par une courbe.

Utilisation de la représentation graphique
La représentation graphique d'une fonction nous en donne une vision globale.
Elle permet par exemple de trouver des valeurs approchées d'images ou d'antécédents.

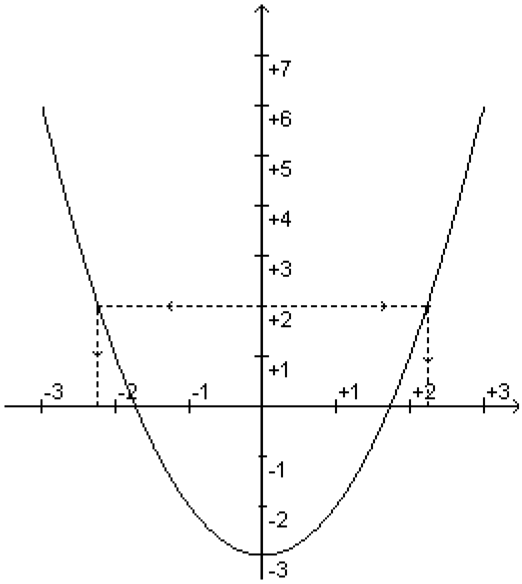


Détermination graphique de l'image de 2,5

Il suffit de déterminer le point A de la courbe dont l'abscisse (c'est *x*) est 2,5, puis de lire son ordonnée (c'est *y*).

L'ordonnée de A est environ 3,2; on en déduit que $f\,(2,5) \sim 3,2$.
Il ne s'agit que d'une valeur approchée, la valeur exacte obtenue par calcul étant :
$f\,(2,5) = 2,5^2 - 3 = 6,25 - 3 = 3,25$.

Recherche du ou des antécédents de 2



Il suffit de trouver tous les points de la courbe dont l'ordonnée (c'est *y*) est 2, puis de lire les abscisses (c'est *x*) correspondantes.

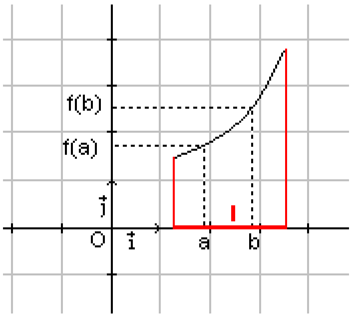
On constate que deux points de la courbe ont une ordonnée égale à 2; leurs abscisses (environ 2,2 et -2,2) sont donc les antécédents de 2.

C- Sens de variations d'une fonction

1. Fonctions croissantes

> Une fonction f est **croissante** sur un intervalle I lorsqu'elle **conserve l'ordre** des nombres.
> Quels que soient les réels a et b de I, si $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$.

Graphiquement, cela se traduit par le fait que la courbe représentative de la fonction f «monte» sur l'intervalle I.



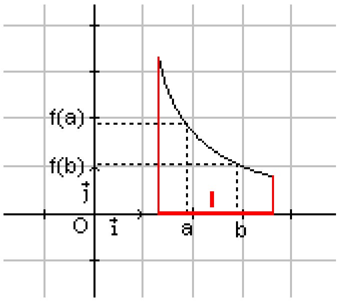
Exemple
La fonction f est croissante sur I.
La courbe monte.
Lorsque les valeurs de x augmentent, les valeurs de f(x) augmentent aussi : f conserve l'ordre des nombres.

2. Fonctions décroissantes

> Une fonction f est **décroissante** sur un intervalle I lorsqu'elle **inverse** l'ordre des nombres.
> Quels que soient les réels a et b de I, si a<b alors f(a)>f(b).

Graphiquement, cela se traduit par le fait que la courbe représentative de la fonction f «descend» sur l'intervalle I.

Exemple

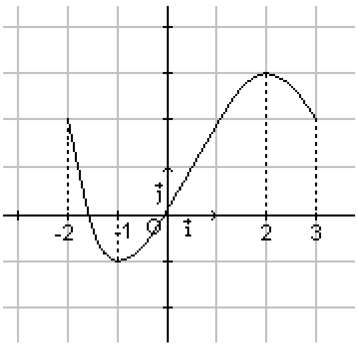


La fonction f est décroissante sur I.
La courbe descend.
Lorsque les valeurs de x augmentent, les valeurs de f(x) diminuent : f inverse l'ordre des nombres.

3. Tableau de variations

Soit f une fonction définie sur un intervalle D.
Pour construire le tableau des variations de la fonction f sur D on détermine les intervalles I contenus dans D sur lesquels f est monotone, c'est à dire soit croissante, soit décroissante.
On note les résultats obtenus dans un tableau où des flèches indiquent la croissance ou la décroissance de f.

Exemple



Considérons la fonction f définie sur [-2 ;3] dont la courbe représentative est dessinée.
On observe que :
a) f est décroissante sur [-2; -1]
b) f est croissante sur [1; 2]
c) f est décroissante sur [2; 3]
D'autre part f(-2)=2, f(-1)=-1, f(2)=3 et f(3)=2.
Tout ceci peut être résumé dans le tableau de variations suivant :

x	-2		-1		2		3
f(x)	2	↘	-1	↗	3	↘	2