

Proportions, cours, première STG

F.Gaudon

1^{er} juin 2009

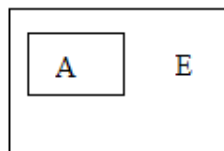
Table des matières

1	Notion de proportion	1
2	Propriétés des proportions	2

1 Notion de proportion

Définition :

- Un ensemble fini E est appelé une *population*.
- Le nombre d'éléments n_E d'une population E est appelé son *cardinal*.
- Une *sous population* A est une partie de la population E .
- La *proportion* p_A (*fréquence*) d'une sous population A de n_A éléments dans une population E de n_E éléments est le nombre $p_A = \frac{n_A}{n_E}$.



$A \subset E$
"inclus"

Remarques :

- Une **proportion** est **un nombre toujours compris entre 0 et 1.**
- Les proportions s'expriment **sous la forme d'une fraction** ou d'un **nombre décimal** ou bien encore d'un **pourcentage**.
- On a $n_A = p_A \times n_E$ et $n_E = \frac{n_A}{p_A}$.

Exemple :

On considère la population E des 3250 montres fabriquées en une journée par une entreprise. On a $q_E = 3250$. La sous population A des 625 montres pour enfants a $q_A = 625$ éléments. La proportion de montres pour enfants par rapport à l'ensemble des montres fabriquées est $\frac{625}{3250} \approx 0,19$ soit 19 % environ.

La sous population de E des montres de sports représente 32 % des montres fabriquées en proportion donc $3250 \times \frac{32}{100} = 1040$ soit 1040 montres.

2 Propriétés des proportions

Définition :

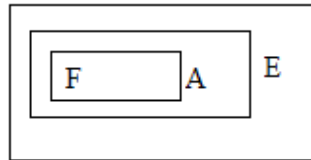
Soient A et B deux sous populations d'une population E .

- L'intersection de A et B notée $A \cap B$ est l'ensemble des éléments de E à la fois dans A et dans B .
- La réunion de A et B notée $A \cup B$ est l'ensemble des éléments de E qui se trouvent dans A ou dans B .

$\cap$ et
 $\cup$ ou
(réunion)

Propriété :

- Soit A une partie d'une population E et F une partie de A . Alors la proportion p d'éléments de F dans E est le produit de la proportion p_1 d'éléments de F dans A et de la proportion p_2 d'éléments de A dans E .
- En particulier, prendre $p_1\%$ puis $p_2\%$ d'un nombre revient à appliquer à ce nombre un pourcentage de $\frac{p_1 p_2}{100}\%$.



$$p_1 = \frac{n_F}{n_A}$$

$$p_2 = \frac{n_A}{n_E}$$

$$p = \frac{n_F}{n_E}$$

$$p_1 p_2 = p$$

Preuve :

- Soient n_E , n_A et n_F les nombres d'éléments respectifs de E , A et F . La proportion de A dans E est $\frac{n_A}{n_E}$, celle de F dans A est $\frac{n_F}{n_A}$ et la proportion de F dans E est $\frac{n_F}{n_E}$. Or $\frac{n_A}{n_E} \frac{n_F}{n_A} = \frac{n_F}{n_E}$.
- Soit x le nombre de départ. Appliquer un pourcentage de $p_1\%$ revient à effectuer $x \times \frac{p_1}{100}$ puis appliquer un pourcentage de $p_2\%$ revient à calculer $x \times \frac{p_1}{100} \times \frac{p_2}{100}$ (on remarquera que l'ordre dans lequel on applique les pourcentages n'a pas d'importance). Soit p le pourcentage correspondant à l'application des deux pourcentages p_1 et p_2 . On a donc $x \times \frac{p}{100} = x \times \frac{p_1}{100} \times \frac{p_2}{100}$ d'où $\frac{p}{100} = \frac{p_1}{100} \times \frac{p_2}{100}$ et donc $p = \frac{p_1 \times p_2}{100}$ ce qu'il fallait démontrer. On pouvait aussi directement remarquer que $\frac{p}{100} = \frac{p_1}{100} \frac{p_2}{100}$ d'après le premier point.



Lycée

Exemple :

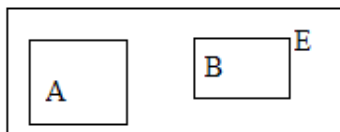
Dans un lycée, 20% des élèves sont en 1^{er}L et 40% des 1^{er}L sont demi-pensionnaires. $\frac{20 \times 40}{100} = 8\%$ donc 8% des élèves sont en 1^{er}L et demi-pensionnaires dans ce lycée.

Propriété :

$$A \cap B = \emptyset$$

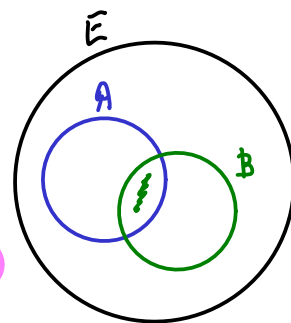
Si A et B sont deux parties disjointes (c'est à dire n'ayant aucun élément commun) d'une même population E et contenant n_A et n_B éléments respectivement, alors la proportion d'éléments dans A ou B par rapport à E est $\frac{n_A + n_B}{n_E}$.

$$P_{A \cup B} = \frac{n_A + n_B}{n_E} = P_A + P_B$$



. Si $A \cap B \neq \emptyset$, alors:

$$P_{A \cup B} = P_A + P_B - P_{A \cap B}$$

**Remarque :**

On ne peut comparer des proportions que si la population de référence est la même.

Exemple :

61,3 % des élèves d'une classe font en première langue anglais et 15,2 % font Allemand en première langue. Alors $15,2 + 61,3 = 76,5$ soit 76,5 % des élèves font anglais ou allemand en première langue, les LV1 Allemands et LV1 anglais forment ici des populations disjointes. Par contre, il n'y a pas de sens à additionner les 53,6 % qui font LV2 Italien et les 12 % qui font LV3 Grec car certains LV2 Italiens peuvent aussi faire Grec.