Trinômes du second degré

A. Fonctions polynômes

On appelle fonction monôme une fonction qui à tout réel x associe ax^n avec a réel non nul et n entier naturel. L'entier naturel n est appelé degré du monôme.

Remarque
Les fonctions constantes sont des monômes de degré 0.
Les fonctions linéaires ($x \mapsto ax$ avec $a \neq 0$) sont des monômes de degré 1.
La fonction carré est un monôme de degré 2.

On appelle fonction polynôme une somme de monômes.
Le degré d'un polynôme est le degré de son monôme de plus haut degré.

Exemples
La fonction f définie par $f(x) = x^3 - 5x + 1$ est un polynôme de degré 3.
Les fonctions affines de coefficient directeur non nul sont des polynômes de degré 1.

B. Equations du second degré

On appelle trinôme du second degré une fonction qui à tout réel x associe $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, c'est à dire une fonction polynôme de degré 2.

On considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.

On appelle discriminant de cette équation le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

Pour tout réel x, $\boxed{ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)}$ (forme canonique du trinôme).

- Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions distinctes, $\boxed{x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$ et $\boxed{x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$.
  Ces solutions sont appelées les racines du trinôme.
  On a la factorisation suivante : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. je n'oublie pas $\underline{\underline{a}}$
- Si $\Delta = 0$, l'équation a une seule solution $\boxed{x_1 = \frac{-b}{2a}}$.
  Cette solution est appelée racine double du trinôme.
  On a la factorisation suivante : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.
- Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution réelle.
  Le trinôme $ax^2 + bx + c$ ne peut pas être factorisé sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.

Exemples
1) Résoudre $x^2 - 5x + 6 = 0$.
On a $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1$. Il ya donc deux solutions qui sont :

$\frac{5-1}{2}$ $\frac{5+1}{2}$

$x_1 = \frac{5 - \sqrt{1}}{2} = \frac{4}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{5 + \sqrt{1}}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

On a la factorisation $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

2) Résoudre $4x^2 - 4x + 1 = 0$.

On a $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 16 - 16 = 0$. Il a donc une seule solution $x_1 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

On a la factorisation $4x^2 - 4x + 1 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.

3) Résoudre $x^2 + x + 1 = 0$.

On a $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$. Il n'y a donc pas de solution réelle. Le trinôme $x^2 + x + 1$ ne peut pas être factorisé.

C. Signe du trinôme

On considère la fonction trinôme définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ et son discriminant Δ.

- Si $\Delta > 0$, l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions x_1 et x_2 et $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
  On a alors le tableau de signe suivant :

x		x_1		x_2	
$x - x_1$	-	0	+		+
$x - x_2$	-		-	0	+
$a(x-x_1)(x-x_2)$	signe de a	0	signe de -a	0	signe de a

x_1 x_2

f est du signe de a à l'extérieur des racines : $]-\infty ; x_1] \cup [x_2 ; +\infty[$

  $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ entre les racines.

- Si $\Delta = 0$, l'équation $f(x) = 0$ a une seule solution x_1. On a alors la factorisation $f(x) = a(x - x_1)^2$.
  $ax^2 + bx + c$ est du signe de a. toujours
- Si $\Delta < 0$, l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solutions, le trinôme ne peut pas être factorisé en un produit de facteurs du premier degré.
  $ax^2 + bx + c$ est du signe de a. $a\left[(\quad)^2 + \underbrace{(\quad)}_{>0}\right]$

$\boxed{\text{En résumé : } ax^2 + bx + c \text{ est toujours du signe de } a \text{ sauf entre les racines lorsqu'elles existent.}}$

Exemples

1) Etudier le signe de $x^2 - 5x + 6$. $= (x-2)(x-3)$

L'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ a deux solutions $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x		2		3	
x^2-5x+6	+	0	-	0	+

2) Etudier le signe de $4x^2 - 4x + 1$.

L'équation $4x^2 - 4x + 1 = 0$ a une solution unique $x_1 = \frac{1}{2}$. On en déduit que $4x^2 - 4x + 1$ est

$4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$

toujours positif.
3) Etudier le signe de $x^2 + x + 1$ $\Delta < 0$
L'équation $x^2 + x + 1 = 0$ n'a pas de solutions, $x^2 + x + 1$ est donc toujours positif.

D. Etude des fonctions trinômes

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

1. Variations

Le tableau de variations dépend du signe de a.

Si a > 0

x		-b/2a	
ax²+bx+c	↘		↗

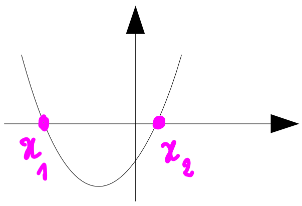
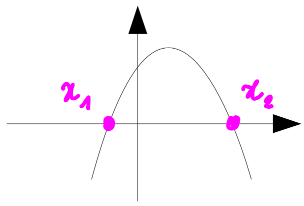
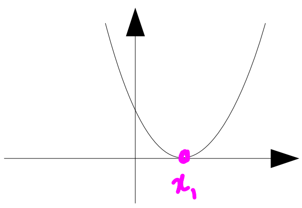
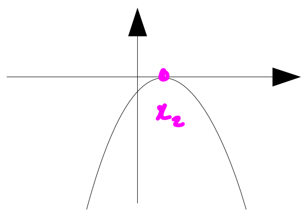
Si a < 0

x		-b/2a	
ax²+bx+c	↗		↘

On a un extrêmum pour $x = \frac{-b}{2a}$.

2. Représentation graphique

La représentation graphique d'une fonction trinôme est une parabole.
Le signe de a indique le sens de la parabole.
Le signe de Δ indique le nombre de points d'intersection avec l'axe des abscisses.

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$	 x_1 x_2	 x_1 x_2
$\Delta = 0$	 x_1	 x_2
$\Delta < 0$ $S = \emptyset$ pas d'intersection avec l'axe des abscisses