Second degré, cours, première S

1 Equations du second degré

Définition :

- Toute solution de l'équation $ax^2+bx+c=0$ est appelée ....Racines.... du trinôme f défini par $f(x)=ax^2+bx+c$ pour tout x réel.
- On appelle discriminant du trinôme le réel Δ défini par $\Delta =$ b^2-4ac

Exemple :
2 est une racine de $2x^2-5x+2$.
Le discriminant du trinôme $2x^2-5x+2$ est $\delta =$.......................... = ...

Remarque :
Ordonner les termes du trinôme avant de calculer le discriminant.

Propriété :

Soit $\Delta=b^2-4ac$ le discriminant du trinôme du second degré ax^2+bx+c.
- Si $\Delta<0$, alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solutions
- Si $\Delta=0$, alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ a une 1 solution
- Si $\Delta>0$, alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ a 2 solutions

Preuve :
On a vu auparavant que $f(x)=a((x-\alpha)^2+\beta)$ où $\alpha=-\frac{b}{2a}$ et $\beta=-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.
On a $f(x)=0$ qui s'écrit encore puisque $a\neq 0$, $(x-\alpha)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$
On reconnaît le discriminant $\Delta=b^2-4ac$.
Donc $(x-\alpha)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$.
- si $\Delta<0$, comme le premier membre $(x-\alpha)^2$ est nécessairement positif, l'équation n'a pas de solution.
- si $\Delta=0$, l'équation s'écrit $(x-\alpha)^2=0$ donc $x=$ $\frac{-b}{2a}$;
- si $\Delta>0$, l'équation donne $x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}=0$ ou $x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}=0$ donc $x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exemple :
On considère l'équation $2x^2-5x+2=0$. On a vu que $\Delta=9=3^2$ est positif. Il y a donc 2 solutions à cette équation :
$x_1=\frac{-(-5)-3}{4}=\frac{1}{2}$ $x_2=\frac{-(-5)+3}{4}=2$.

Factorisation du trinôme :

Avec les mêmes notations que précédemment, on a pour $f(x)=ax^2+bx+c$:
- si $\Delta=0$, $f(x)=a(x-x_1)^2$ où $x_1=\frac{-b}{2a}$;
- si $\Delta>0$, $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ où $x_1=$ .... et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
- si $\Delta<0$, $f(x)$ ne se factorise pas.

Preuve :
On a vu précédemment que $f(x)=a((x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2})$.
- Si $\Delta=0$, on a donc $f(x)=a((x+\frac{b}{2a})^2)$ ce qui est bien la factorisation attendue;
- si $\Delta>0$, on a $a(x-x_1)(x-x_2)=a(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2)$ pour tout x réel.
  Or $x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=\frac{-b}{a}$.
  En outre, $x_1x_2=\frac{1}{4a^2}(-b+\sqrt{\Delta})(-b-\sqrt{\Delta})=\frac{1}{4a^2}=(b^2-b\sqrt{\Delta}+b\sqrt{\Delta}-\sqrt{\Delta}^2)$ donc $x_1x_2=\frac{1}{4a^2}(b^2-\Delta)=\frac{1}{4a^2}(b^2-b^2+4ac)=\frac{c}{a}$.
  D'où $a(x-x_1)(x-x_2)=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=ax^2+bx+c=f(x)$ ce qui justifie le deuxième cas.
- On a alors $-\Delta>0$ donc $f(x)=a((x+\frac{b}{2a})^2+\frac{-\Delta}{4a^2})$, expression qui est la somme de deux carrés.

Exemple :
On a vu que l'équation $2x^2-5x+2=0$ a pour discriminant $\Delta=9$ et admet deux solutions 2 et $\frac{1}{2}$. On a donc $2x^2-5x+2=$ $2(x-\frac{1}{2})(x-2)$

2 Inéquations du second degré

Propriété :

> Avec les mêmes notations que précédemment,
> - si $\Delta < 0$, $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$;
> - si $\Delta = 0$, $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$ et $f(\frac{-b}{2a}) = 0$
> - si $\Delta > 0$, $f(x)$ est du signe de a sur l'intervalle $]-\infty ; x_1] \cup [x_2 ; +\infty[$ et du signe de $-a$ sur l'intervalle $]x_1 ; x_2[$

Preuve :

- Si $\Delta < 0$, on utilise la forme canonique $f(x) = a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2})$. On a $(x + \frac{b}{2a})^2$ qui est positif pour tout réel x et $-\frac{b^2-4ac}{4a^2} = -\frac{\Delta}{4a^2}$ qui est strictement positif donc $f(x)$ est du signe de a pour tout réel x.
- Si $\Delta = 0$, $f(x) = a(x - x_0)^2$ d'après la propriété précédente donc $f(x)$ est du signe de a pour tout x réel et ne s'annule que pour $x = x_0$.
- Si $\Delta > 0$, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. On fait un tableau de signe suivant le signe a. Faisons le par exemple pour $a < 0$. On obtient :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		$-$	|	$-$	|	$-$	
$x - x_1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x - x_2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ce qui justifie la propriété dans le cas où $a < 0$. On procède de même pour le cas $a > 0$.

Exemple :

Résolution de $\frac{-x^2+6x+7}{x+2} \geq 0$.

$x + 2 = 0$ équivaut à $x = -2$ donc -2 est la seule valeur interdite.

Résolution de $-x^2 + 6x + 7 = 0$. On a $\Delta = 64 = 8^2$. $\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions distinctes $x_1 = \frac{-6-8}{-2} = 7$ et $x_2 = \frac{-6+8}{-2} = -1$

Étude de signe :

x	$-\infty$		-2		-1		7		$+\infty$
$x + 2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$-x^2 + 6x + 7$		$-$	|	$-$	0	$+$	0	$-$	
$\frac{-x^2+6x+7}{x+2}$		$+$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $S =]-\infty ; -2[\cup [-1 ; 7]$

$\frac{-x^2+6x+7}{x-3} \geq 0$

$S =]-\infty ; -1] \cup]3 ; 7]$

3 Interprétation graphique

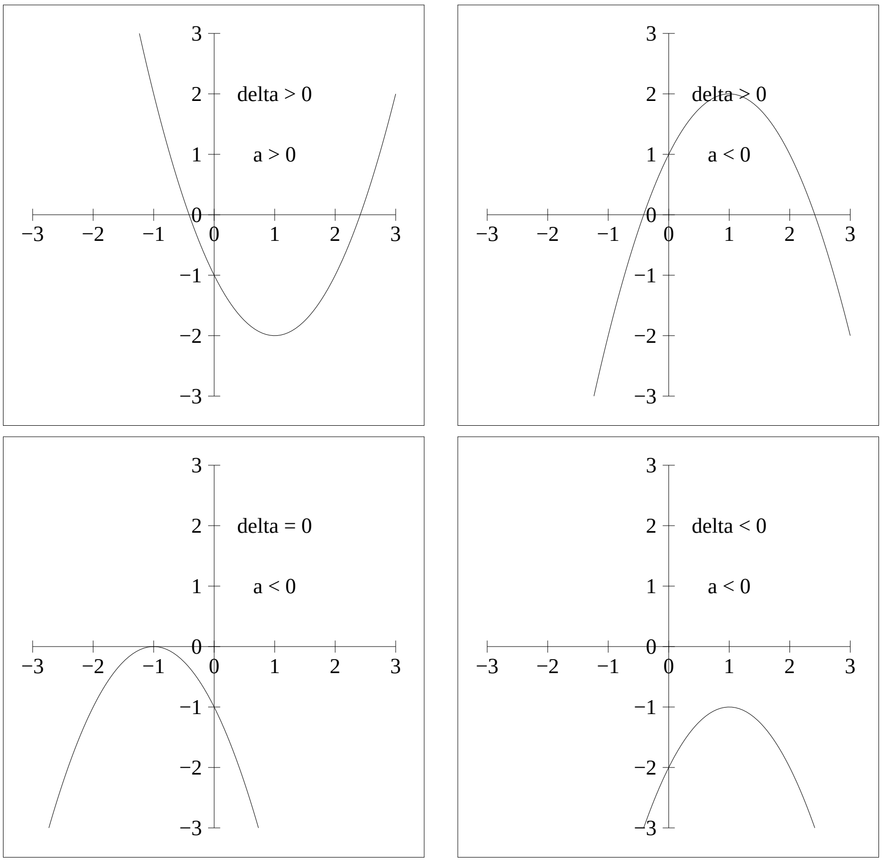
Propriété :

> Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont les abscisses des points d'intersection s'ils existent de la parabole représentant la fonction f et de l'axe des abscisses.

Interprétation :

- Si $\Delta > 0$, la courbe coupe l'axe des abscisses en 2 pts ;
- si $\Delta = 0$, la courbe coupe l'axe des abscisses en 1 seul pt ;
- si $\Delta < 0$, la courbe ne coupe pas l'axe des abscisses.

En outre, si $a > 0$ la parabole a ses branches tournées vers le haut et tournées vers le bas si $a < 0$


delta > 0
a > 0
delta > 0
a < 0
delta = 0
a < 0
delta < 0
a < 0